佛教大学社会学部論集　第62号（2016年3月）

評定と選択

――選択肢が3個のときの正規分布モデル――

山　口　　　洋

〔抄　録〕

本稿は，社会調査の単数選択法において3個の事物（選択肢）から最良の1個を選択させる場合，個々の事物の選択確率と，個々の事物に対する人々の評価（評定値）の相関・散布度がどう関係するかを，事物への評価が多次元正規分布に従うという仮定の下に，数理的に分析した。その結果，次の4点が明らかになった。①他の条件が一定ならば，ある事物が選択される確率は，他の2個の事物に対する評価の相関が高まると必ず高まる。②他の条件を一定として，ある事物に対する評価の散布度（標準偏差）が増大しても，その事物が選択される確率が必ず高まるとは言えない。しかし③他の条件が一定なら，ある事物に対する評価の散布度が限りなく増大すれば，その事物の選択確率は，その条件下での最大値へと限りなく近づく。また，④3個の事物に対する評価の相関がすべてゼロ以下であれば，他の条件を一定として，ある事物に対する評価の散布度が増大すると，その事物が選択される確率は必ず高まる。

キーワード：社会調査法，単数選択法，評定法，相関，散布度

1. 序論

1.1. 問題提起　－評定法と単数選択法－

量的社会調査において，回答者を媒介にして複数の事物（意見，人物，商品など）の特性を測定する方法を総称して第2種測定法[1]と呼ぶことがある（原・海野 2004，福武 1984）。複数の事物に対する回答者の価値判断を測定・集計して，それぞれの事物に集合的かつ数量的な評価を与える目的の調査は，すべて第2種測定を行っていることになる。

こうした方法の中でも評定法と単数選択法は一般に最もよく知られた方法と言ってよい[2]。評定法は，個々人が複数の事物のそれぞれに評点を与え，その合計点または平均点で事物を評価する方法である。評定法は社会調査の第2種測定法としてだけでなく，スポーツの採点競技

などで複数の専門家が選手の演技を評価する際にも用いられている。一方，単数選択法は，複数の選択肢（事物）の中で個人が最良と思うものを一つ選び，それを選択した人数あるいは選択比率で事物に評価を与える方法である。単数選択法は，公職選挙で当選者や次点者を決定する際の単記投票方式（plurality voting：相対多数投票）とほぼ同様の目的および形式をもつ。単記投票方式の諸性質は，選挙制度・投票方式の研究の中でかなり詳しく明らかにされてきており，そこでの知見は社会調査における単数選択法にそのまま応用できる（山口 2010, 2011）。また，同一時間帯に放送されたテレビ番組を，そのリアルタイム視聴率で比較評価する場合も，事実上，単数選択法と同様の形式が採られているとみなしてよい。

仮に同じ複数の事物に対して同じ人々が評定法と単数選択法の双方を用いて社会的評価を行ったとすると，両者の結果はどのような関係になるだろうか？単純に評定平均の高い事物ほど単数選択法でも選ばれやすいのならば，両者の結果には実質的な違いが見られないであろう。しかし単数選択法におけるある事物の選ばれやすさが，その事物の評定平均以外の要因によって左右されるとすれば，両者の結果には大きな食い違いが生じる可能性がある。では単数選択法における選ばれやすさを左右する要因として，評定平均以外のどんな要因が考えられるであろうか？この問題に理論的な解答を与えることが本稿の課題である。しかし本稿の限られた紙幅でこの問題の全般を扱うことはできない。事物の個数によって，また人々が事物に与える評点がどのように分布するかによって，解答は様々だと予想されるからである。そこで本稿は，この問題全般のうち，最も単純で典型的なケースのみを扱うことにする。

まず，本稿は事物の個数が「3 個」の場合を扱う。選挙制度・投票方法の研究によれば，単数選択法は，選択肢が 3 個（以上）の場合，選択肢が 2 個だけの場合には見られないような様々なパラドクスを生み出す（Poundstone 2008=2008）。次節で詳述するが，これらのパラドクスのうちいくつかは，評定法の結果との食い違いのパターンとして読み換え可能である。そこで本稿は，こうしたパラドクスが生じるケースのうち最も単純なケース，すなわち事物の個数がちょうど 3 個の場合を題材に選んだ。

また本稿は各事物に対する評点が多次元正規分布（詳しくは第 2 節以降で述べる）に従うものと仮定する。実際には，この仮定が不適切な場合もあるが，多次元正規分布は多変量を扱う統計学において最もよく知られた確率分布モデルであり，様々な性質が詳しく明らかにされている。そこで本稿は，この仮定の下での解答を追究することで研究の端緒を開くことにした。

1.2. 先行研究と本稿のねらい　－相関命題と散布度命題の検証－

本稿とほぼ同じねらいをもった直接の先行研究は山口（2011）の研究である。山口（2011）は単記投票の欠点として古くから指摘されてきた票割れ現象と双対性（duality）不満足の現象を，以下のように単数選択法と評定法の関係を示す現象として捉え直した。

票割れとは，3 人の候補者のうち 2 人の支持基盤が重複したとき，この 2 人の支持者はいず

れか 1 人を選ばざるをえないため，残りの 1 人が有利になる現象を指す。2000 年のアメリカ大統領選挙では，環境問題に関する著書で知られるゴア候補と，緑の党の支持を受けたネーダー候補が，環境問題に関心の高い有権者の票を奪い合ったことが，ブッシュ候補（当選者）に有利に働いたのではないかと言われた（Poundstone 2008=2008）。この種の状況において，3 人の候補者に評点を与える形で世論調査が行われたならば，支持基盤の重複する 2 人の評点の相関は非常に高くなるだろう。なぜなら，この 2 人のうち一方を高く評価する人は大抵の場合，他方も高く評価するからである。また，支持基盤が重なるということは「不支持基盤」も重なることだから，一方を低く評価する人は，大抵の場合，他方も低く評価するであろう。

また，単記投票は「双対性」と呼ばれる投票方式が満たすべき規準を満たしていないと批判されてきた。双対性とは仮に全有権者の全候補に対する選好順序（候補者の順位づけ）が正反対になったならば，選挙結果も正反対になるべきだという規準である（中村・富山 1998，佐伯 1980）。例えば，ある投票（集計）方式で ABC の 3 人を候補とする選挙が行われ，結果は A が 1 位，C が 3 位であったとしよう。ここで全有権者の選好順序が逆転したならば，A は 3 位に，C は 1 位になるべきであり，そうならない投票方式は双対性の規準を満たさない。仮に 3 人の候補を ABC の順に評価する人が 4 割，CBA の順に評価する人が 3 割，BCA の順に評価する人が 3 割いたとしよう。単記投票では A が 4 割の票を集めて当選する。しかしここで全有権者の選好順序が逆転したとしても，A が 6 割の票を集めて当選する。よって単記投票は双対性を満たさない。言い換えれば，単記投票では「最良の人」を選ぶ選挙と「最悪の人」を選ぶ選挙が同じ結果になる可能性がある。上の例で，評定法による世論調査が行われたなら，A の評価の「平均」は B や C と比べてそう高くはならない。A を最も高く評価する人々が 4 割いる一方，A を最も低く評価する人々が 6 割存在するからである。しかし，A の評点の散布度（ばらつき）は B と C を上回る可能性が高い。そして候補者が 3 人のときの単記投票では，評価の散布度の大きさが有利に働き，A が当選することになると考えられる。

こうして山口（2011）は票割れ現象を「相関命題」として，双対性不満足の現象を「散布度命題」として，それぞれ社会調査の単数選択法にも応用可能な形で一般化した。相関命題とは，他の条件を一定とすれば，3 個の事物（選択肢）のうち 2 個の評価の相関が大きくなると，残り 1 個が選択されやすくなることである。同じく散布度命題とは，他の条件を一定とすれば，3 個中 1 個の評価の散布度が上昇すると，その 1 個が選択されやすくなることである。また山口（2011）は，本稿と同様の正規分布の仮定を置いた上で，数値実験（シミュレーション）により相関命題および散布度命題が成立する例を示している。

しかし山口（2011）の研究は不完全なものであった。山口（2011）の行った数値実験は，多次元正規分布の特殊ケース（すべての事物の評価の期待値が等しいケース）において，相関命題と散布度命題が成立することを示したに過ぎない。したがって，多次元正規分布の仮定の下で相関命題・散布度命題が「常に」成立するのか，または成立しない場合もあるのかは不明で

ある。そして，この問題に数値実験で解答することはできない。仮に多種多様な特殊ケースの実験を繰り返し，その全ケースで相関・散布度命題が成立したとしても，これらの命題が「常に」成立することを確証するわけではない。この種の問題を解決するには，数値実験などの帰納的アプローチではなく，数学的な定理を用いた演繹的アプローチが必要である。

そこで本稿は，この問題に対して次の手順で演繹的にアプローチする。次節で基本概念および相関命題・散布度命題をより厳密な形で定義づける。そして第3節，第4節では，これらの命題の妥当性について，統計学の定理を援用しながら検討し第5節で結論を述べる。主な結論は次の4点である。3個の事物に対する評価，および評価の差を表す諸変数が多次元正規分布に従うならば，①相関命題は常に成立する。同じ仮定の下で②散布度命題は成立しない場合があり，③関連する様々な変数が一定の条件を満たす場合にのみ成立する。ただし，同じ仮定の下で④「弱い散布度命題」は常に成立する。すなわち「他の条件を一定としたとき，ある事物の評価の散布度が限りなく増大すれば，その事物の選択確率は必ず，その条件下での最大値へと限りなく近づく」と言うことはできる。同じく第5節では，この結論の社会調査論なインプリケーションにも言及する。

2. 本稿の仮定・基本概念・記号法

本節では前節で述べた問題および概念をフォーマライズする。まず，無限母集団からランダムに選ばれた1個人が3個の事物 *ABC* に評点を与えて順序づけ，最も評価の高い1個を選ぶ状況を想定する。すると事物 *ABC* のそれぞれが，ある個人によって選ばれる「確率」を考えることができる。そして，この確率が *ABC* に対する評価（評点）の相関および散布度によってどう変化するかが本稿の主題となる。ただし以下では *ABC* のうち，「*A*」が選ばれる確率をもっぱら考えていく。もちろんそうするのは単なる便宜である。*A* について言えることは当然ながら *B* にも *C* にも同様に当てはまる。

本稿は3個の事物 *ABC* に対する評価を表す変数を ABC と表記する。つまり，事物それ自体を表す場合は斜体のアルファベットで，事物への評点を表す場合は普通の字体のアルファベットで表記する。

また，評点 ABC は連続型の確率変数として定義される。言い換えると，個人は事物 *ABC* にいくらでも細かい単位で評点を与えることができるものとする。ただし実際に用いられる評定尺度のほとんどは「1点から5点までの整数で答えよ」といった形で回答者に与えられる。したがって調査の回答者によって「表明された」評点は離散変数と考えるのが適当である。しかし，この「表明された」評点は，本来連続型である「真の」評点を回答者が質問で指定された離散型の値に丸めたものだと解釈できる。そして本稿は，こうした丸めが行われる以前の「真の」評点を主に取り扱う。以下，本稿で単に「評価」という言葉を使う場合は，常に，この真

の評点のことを指すことにする。

次に X = A − B，Y = A − C と定義する。つまり A と B の差を X，A と C の差を Y で表す。すると A を B より高く評価する状態は X > 0, A を C より高く評価する状態は Y > 0 と表せる。したがって単数選択法においてある個人が A を選ぶ確率は，X > 0 かつ Y > 0 となる確率として定義される。また確率を表す記号としては P（ピー）を用い，ある個人が A を選ぶ確率は P（X > 0 ∧ Y > 0）と表記される。なお，ABCXY といったアルファベットの大文字は確率変数そのものを表す時に，abcxy といったアルファベットの小文字は，これらの確率変数の実現値を表すときに用いることにする。

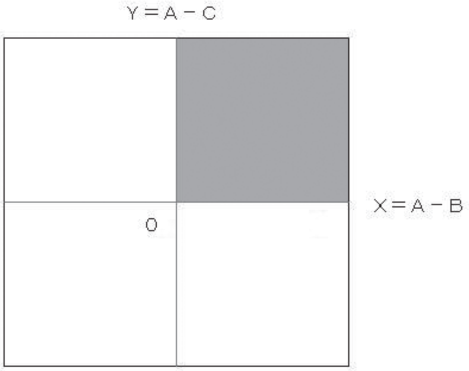
そして本稿はこれらすべての変数が多次元正規分布に従うものと仮定する。このとき各変数はそれぞれ1次元正規分布に従い，各変数のペア，すなわち（A，B），（A，C），（X，Y）…等々はすべて2次元正規分布に従う（平岡・堀　2009：207頁）。特に（X，Y）が2次元正規分布に従うという仮定は本稿において決定的な役割を果たす。2次元正規分布の性質については，次節で改めて詳述する。

また ABCXY の各変数の期待値をそれぞれ μ_A，μ_B，μ_C，μ_X，μ_Y とし，同じく標準偏差を σ_A，σ_B，σ_C，σ_X，σ_Y とする。本稿では σ_A，σ_B，σ_C，σ_X，σ_Y はいずれも正の実数とし，標準偏差のいずれかがゼロのケースは考察の対象外とする。本稿の考察では，ある数値を標準偏差で割る操作（例えば相関係数の計算）が頻出するため，これが不可能なケースを予め除外しておけば議論を単純化できる。また A ～ C の標準偏差のいずれかがゼロということは，ある事物にすべての人が同じ評価を与えるという非現実的な状況を意味しており，このケースを除外しても議論の一般性はほとんど失われない。同じく X，Y の標準偏差のいずれかがゼロということは，すべての人が事物 AB 間，または AC 間に同一の点差をつけるという非現実的状況を意味するから，これも除外して構わないだろう。また本稿では，A ～ C 間の相関係数を ρ_{AB}, ρ_{AC}, ρ_{BC}（ρ: ギリシャ文字のロー），同じく共分散を σ_{AB}，σ_{AC}，σ_{BC}，XY 間の相関係数を ρ_{XY}，同じく共分散を σ_{XY} とする。ここでは上記の相関係数はいずれも-1 ～ +1 の値をとりうることにしておくが，値の範囲をより狭く限定する必要が生じた場合はその都度，記すことにしたい。

これらの記号を使って相関命題を表現すれば「他の条件を一定とすると，ρ_{BC} が高まれば P（X > 0 ∧ Y > 0）も高まる」ということである。同じく散布度命題は「他の条件を一定とすると，σ_A が高まれば P（X > 0 ∧ Y > 0）も高まる」と表現できる。

以上の枠組みを散布図の座標軸で示したのが図1である。ここで ABC のうち A が選ばれる確率は，個人 i の評価を示す点（x_i，y_i）が第1象限の部分に描かれる確率と考えることができる。そして評価を行う個人の数が非常に多ければ，その確率は第1象限に描かれる点の割合，すなわち A を選択した人の割合とほぼ一致するであろう。

図１　散布図の座標軸



3. 相関命題

3.1. 相関命題一般について

本節では，事物 A と B および A と C の評定値の差を意味する X と Y が２次元正規分布に従うならば，相関命題は一般法則として常に成立することを示す。

まず相関命題の意味をより明確にしておこう。相関命題とは「他の条件を一定とすると，ρ_{BC} が上昇（低下）すれば P（X ＞ 0 ∧ Y ＞ 0）も上昇（低下）する」ことだった。他の条件とは，ABC それぞれの期待値，ABC それぞれの標準偏差，AB 間，AC 間の相関を指す。ただし ρ_{BC} は，これらの条件と無関係に-1 から +1 までの値を自由にとり得るわけではない。ρ_{AB}，ρ_{AC} の値がある値で一定だとすると，ρ_{BC} の変域はより狭く限定されることがある。例えば $\rho_{AB} = \rho_{AC} = -0.5$ のとき，ρ_{BC} は-0.5 より小さな値にはなりえない(3)。

次に２次元正規分布の基本的性質を確認しておこう。２次元正規分布とは付記１に示した確率密度関数で表される分布のことで, X と Y が２次元正規分布に従うことを（X, Y）～ N_2（μ_X, μ_Y，σ^2_X，σ^2_Y，ρ_{XY}）と表現する。また，この X と Y を標準化（平均を引いて標準偏差で割る操作）した変数を Z_X，Z_Y とすれば，これらは N_2（0，0，1，1，ρ_{XY}）に従う。この分布を２次元標準正規分布(4)と呼ぶ。２次元標準正規分布の実現値を２次元座標にプロットすると，原点を中心にした楕円形の分布（岡田 1980）が描かれる。ちなみに２次元正規分布に従う X と Y は，両者の対応関係を考慮しないならば，それぞれ N（μ_X，σ^2_X），N（μ_Y，σ^2_Y）の１次元正規分布に従う。

x ＝ 0，y ＝ 0 をそれぞれ標準化した値を z_{x0}，z_{y0} と表記すれば，本稿の主題である P（X ＞ 0 ∧ Y ＞ 0）を求めるには，２次元標準正規分布における P（$Z_X > z_{x0}$ ∧ $Z_Y > z_{y0}$）を求めればよい（木島 1994：109–110 頁）。この関係は，１次元正規分布での P（X ＞ x）を求めるときに，P（$Z_X > z_x$）を記した数表，すなわち標準正規分布の上側確率を記した数表を用いるのと同じ

である。また，この上側確率が1次元標準正規分布の確率密度関数を積分することで求められるのと同じように，2次元標準正規分布における P（$Z_X > z_x \wedge Z_Y > z_y$）も，付記1に記した式のように，確率密度関数を2重積分することで求められる。

以上の準備を踏まえ，以下，相関命題が常に成立することを示そう。まず，P（$Z_X > z_x \wedge Z_Y > z_y$）が ρ_{XY} の増減によりどう変化するかを知るには，P（$Z_X > z_x \wedge Z_Y > z_y$）を意味する式を ρ_{XY} で微分すればよい。そして，その導関数は2次元標準正規分布の確率密度関数に等しくなることが知られている（Drezner & Wesolowsky 1990）。また，木島（1994：110頁）および木村（2011：37頁）によれば，2次元標準正規分布の累積分布関数，すなわち P（$Z_X \leqq z_x \wedge Z_Y \leqq z_y$）を意味する積分の式を ρ_{XY} で微分すると，やはりその導関数は確率密度関数に等しくなる。これらふたつの定理は本質的に同じことの裏返しの表現である。例えば $X = B - A$，$Y = C - A$ と定義を逆転させたなら，元の定義で一方の定理が真ならば，逆転後の定義では他方の定理が真でなければならないからである（連続確率変数の場合，不等号にイコールがついているか否かの違いは本質的な違いではない）。

また2次元標準正規分布の確率密度関数は常に正の値をとるから，上述の導関数の値も常に正である。この事実を言い換えれば，他の条件が一定であるとき，相関係数 ρ_{XY} が増大すれば P（$Z_X > z_x \wedge Z_Y > z_y$）も常に増大するということである。よって X と Y が2次元正規分布に従うなら，他の条件が一定だとすると，P（$X > 0 \wedge Y > 0$）は ρ_{XY} の増大により必ず増大するとわかる。

相関命題は ρ_{BC} と P（$X > 0 \wedge Y > 0$）の関係について述べた命題なので，次に ρ_{XY} と ρ_{BC} の関係を明らかにする必要がある。ρ_{XY} を変数 ABC の分散・共分散を使って表記すると下の式のようになる。証明は付記2を参照してほしい。

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_{AB} - \sigma_{AC} + \sigma_{BC}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\sigma_{AC}}} \quad \cdots①$$

この①式の分母の符合は正なので，他の変数が一定なら σ_{BC} が増大すれば必ず ρ_{XY} も増大するとわかる。そして $\rho_{BC} = \sigma_{BC}$ ／（$\sigma_B\sigma_C$）であることから，σ_B と σ_C が一定なら ρ_{BC} の増大はただちに σ_{BC} の増大を意味する。したがって ρ_{BC} が増大すれば，必ず ρ_{XY} が増大し，その結果，P（$X > 0 \wedge Y > 0$）も増大するとわかる。以上から，A と B の差，および A と C の差が2次元正規分布に従うならば，相関命題は常に真であることが明らかとなった。

3.2. 3個の事物の評定平均が全て等しい場合

2次元正規分布の仮定の下で相関命題は一般法則として成り立つ。では B と C の相関係数がどの程度上昇すると，P（$X > 0 \wedge Y > 0$）はどの程度上昇するのだろうか。この問いへの解答は，ρ_{BC} 以外の様々な条件，すなわち ABC それぞれの期待値・標準偏差および AB 間 AC

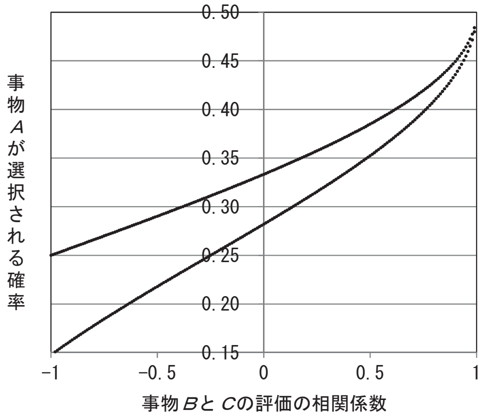
間の相関によって「ケースバイケース」と言うしかない[5]。さしあたって本稿では，ABC の期待値，すなわち評定平均値が全て等しい場合の解答を参考までに示しておく。なお山口（2011）はこの問題の解答を数値実験により推定したが，ここでは実験・推定によらず正確な値を求める簡単な公式（式②）を用いる。なお式②は，次節で散布度命題の反例を示す際にも使用する。

$\mu_X = \mu_A - \mu_B$，$\mu_Y = \mu_A - \mu_C$ であるから，本節が想定する $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ の場合，$\mu_X = \mu_Y = 0$ となる。この特殊ケースにおいて，A が選ばれる確率，すなわち P（X > 0 ∧ Y > 0）は前節の式①により ρ_{XY} を求め，それを下の式②に代入することよって簡単に求められる。式②の $\cos^{-1}$ は，余弦関数の逆関数（アークコサイン）を意味する。π は円周率である。この式の由来については付記 3 を参照してほしい。

$$\mu_X = \mu_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad P(X > 0 \wedge Y > 0) = \frac{\cos^{-1}(-\rho_{xy})}{2\pi} \qquad \cdots②$$

式①②を使ったふたつのケースの計算結果を図 2 に示した。まず最も単純な $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0$（すなわち $\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = 0$）というケースを考える。すなわち ABC は標準偏差が 1 ですべて等しく，AB 間，AC 間の相関がゼロの場合である。このときの ρ_{BC} と P（X > 0 ∧ Y > 0）の関係を示したのが図 2 の上の曲線である。ρ_{BC} が-1 から 0 を経て +1 まで増大すると，A が選択される確率は 0.25 から約 0.333（ = 1/3）を経て 0.5 まで増大するとわかる。山口（2011）の数値実験で推定されたとおりである。詳しい解釈は山口（2011）を参照されたい。

図 2　相関命題の数値例（$\mu_A = \mu_B = \mu_C$ のとき）



上の曲線：$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0$，$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 1$
下の曲線：$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0$，$\sigma_A = 0.5$，$\sigma_B = \sigma_C = 1$

図 2 の下の曲線は，$\sigma_A = 0.5$，$\sigma_B = \sigma_C = 1$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0$ の場合を示したものである。このとき ρ_{BC} が-1 から 0 を経て +1 まで増大すると，A が選択される確率は約 0.150 から約 0.282 を経て 0.5 まで急激に増大する。特徴は B と C の相関がマイナスのときに，A の選択確率がか

なり低くなることである。山口（2011）は ρ_{BC} ＝ -0.5 のときの値（約 0.218）を数値実験で推定し，このパターンを「折衷的第 3 極の埋没」と呼んでいる。このとき事物 B と C の一方を高く評価する人は，多くの場合，もう一方を低く評価しており，いわゆる 2 極構造が生じている。そして多くの人々は A に中間的な評価を与えるため，A が選ばれる確率は極端に低くなるのである。

4. 散布度命題

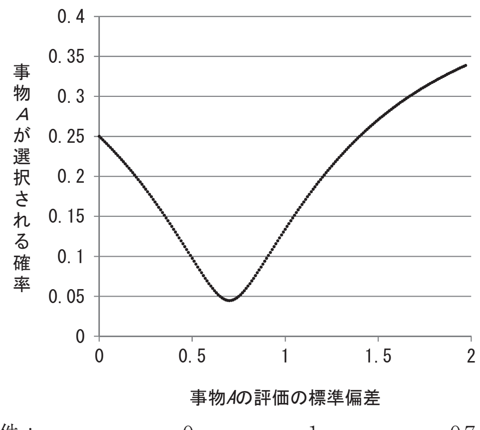
4.1. その意味と反例

本節では，X と Y が 2 次元正規分布に従うと仮定しても，散布度命題には反例，すなわち σ_A が増大すると P（X ＞ 0 ∧ Y ＞ 0）が減少するケースが存在することを示す。

準備として散布度命題の意味を今一度確認しておく。散布度命題とは，他の条件を一定とすると，σ_A が高まれば P（X ＞ 0 ∧ Y ＞ 0）も高まることだが，「他の条件を一定とする」ことの意味をより明確にしておきたい。

まず ABC の期待値および ABC 間の相関係数は一定とする。そして σ_A 以外の標準偏差，すなわち σ_B，σ_C は定数と考える。しかし共分散，特に σ_{AB} と σ_{AC} を定数と考えることはできない。なぜなら ρ_{AB} ＝ σ_{AB} ／（$\sigma_A\sigma_B$），ρ_{AC} ＝ σ_{AC} ／（$\sigma_A\sigma_C$）だから，ρ_{AB}，ρ_{AC}，σ_B，σ_C が一定で σ_A が増大（減少）すれば，それに応じて σ_{AB}，σ_{AC} も必ず増大（減少）するからである。なお B と C の共分散 σ_{BC} は，ρ_{BC}，σ_B，σ_C が一定なら必ず一定に保たれる。したがって，散布度命題をより厳密に表現すれば「ABC の期待値，ABC 間の相関係数，および BC の標準偏差が一定であるとき，A の標準偏差が増大すると A が選択される確率が高まる」となる。

図３　散布度命題の反例



他の条件：$\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0$，$\sigma_B = \sigma_C = 1$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0.7$，$\rho_{BC} = 0$

しかしこの散布度命題は一般には成立しない。図3は，$\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0$のときの反例を示したものである。具体的には$\sigma_B = \sigma_C = 1$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0.7$，$\rho_{BC} = 0$を定数とし，$\sigma_A$を0から2まで変化させている。計算は，式①を散布度命題の趣旨に合わせて変形した下の式③に上記の数値を代入してρ_{XY}を求め，それを既述の式②に代入して行った。

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_A^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B - \rho_{AC}\sigma_A\sigma_C + \rho_{BC}\sigma_B\sigma_C}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{AC}\sigma_A\sigma_C}} \quad \cdots③$$

図3において，σ_Aがゼロから0.7まで増大すると，Aの選択確率は0.25から約0.045まで減少する。ここが散布度命題の反例にあたる。そしてσ_Aがさらに増大すると，Aの選択確率は増大に転じる。ここの部分は散布度命題が述べるとおりの関係になっている。

Aの散布度とAの選択確率に図3のような複雑な関係が生じる理由は，図4～6の数値例を見れば明らかになる。図4～6は，図3と同様に分布する変数ABCの実現値の組み合わせをコンピュータで2,000個発生させ（方法は付記4を参照），そのうち典型的と思われる5個のサンプルを抜き出して，図4（σ_A=0.14）から図5（σ_A=0.7），図6（σ_A=1.75）へとAの標準偏差が増大すると，ABCの大小関係がどう変化するかを示したものである。なお，この数値実験ではBとCの値，およびABCの値の対応関係は全く変えずに，Aの値の標準偏差（期待値＝0からの乖離度）のみを変化させている。

図４　数値例（σ_A=0.14）

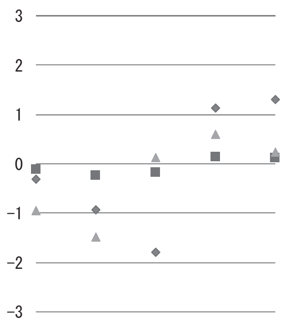


図５　数値例（σ_A=0.7）

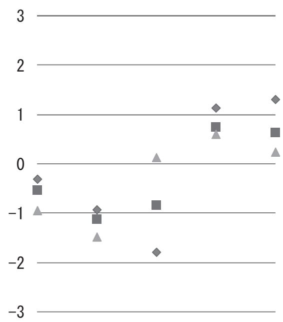


図６　数値例（σ_A=1.75）

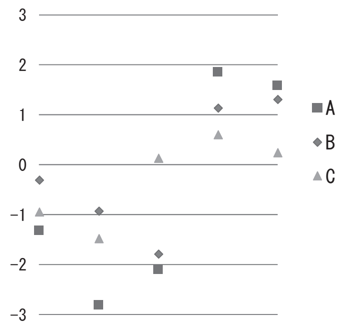


図4～6における他の条件：$\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0$，$\sigma_B = \sigma_C = 1$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0.7$，$\rho_{BC} = 0$
タテに3個並んだ点は，1人の人がABCそれぞれに与える評点を意味する。

AB間およびAC間に比較的大きな正の相関（$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0.7$）があるため，図4～6に示したように，BとCがともに負のときには大抵の場合，Aも負の値を，BとCがともに正のときにはAも正の値をとる。

ただし図4のようにσ_Aがゼロに近い値（0.14）のときには，BとCがともに負の場合，（図4の左端から2個のサンプル）Aが選ばれることになる。BとCの散布度はAよりも大きい

から，BとCがゼロを下回る場合，Aよりも大幅に下回ることになるからである。一方，BとCの値がともに正のときには（図4の右端2個），大抵の場合，Aは選ばれない。Aのばらつきが小さいため，BおよびCの正の値を上回ることができないからである。ちなみに図4の$\sigma_A = 0.14$のとき，式③②によればAの選択確率は約0.216になる。

図5のようにσ_Aが0.7まで上昇すると，Aの選択確率は極めて低い値となる。なぜなら大多数のサンプルにおいて，AはBとCのちょうど中間の値をとることになるからである。このときAの選択確率はゼロに近い値にまで低下する。先ほど述べたように，このときAの選択確率は約0.045になる。

ところがσ_Aが0.7を超えて増大するとAの選択確率は上昇に転じる。そして図6のように$\sigma_A = 1.75$にまで増大すると，Aの選択確率は約0.312に達する。なぜならAのばらつきがBとCのそれを上回るため，図6の右端2個のサンプルがそうであるように，BとCが正の値をとる場合，Aはそれを上回る正の値をとる可能性が高くなるからだ。

このように散布度命題には反例が存在する。散布度命題は図5から図6への（またはその逆の）変化の可能性しか想定しておらず，図4から図5への（またはその逆の）変化の可能性を想定していない。

4.2. 弱い散布度命題

散布度命題はどんな場合に成立するのであろうか？大雑把な形で先に述べれば，図5から図6への変化のように，σ_Aが比較的大きな値をとって変化するなら，散布度命題は常に成立すると言うことができる。以下，こう言える理由を説明する。

次のような弱い形に言い換えた散布度命題は，2次元正規分布の仮定の下では常に成立する。すなわち「他の条件を一定としたとき，Aの散布度が限りなく大きくなれば，Aの選択確率は，その条件の下でありうる最大の値に限りなく近づいていく」という命題である。本稿はこれを「弱い散布度命題」と呼ぶ。また以下では，元々の散布度命題を「強い散布度命題」と呼ぶことにする。

弱い散布度命題が常に成立することは，式③において，他の条件を一定としてσ_Aを無限大に近づけたときのρ_{XY}の極限が1であることから明らかである。証明は付記5を参照されたい。既述のとおりρ_{XY}が増大すればP（$X > 0 \wedge Y > 0$）も増大するから，ρ_{XY}が最大値の1に限りなく近づくということは，P（$X > 0 \wedge Y > 0$）が，その条件（つまりσ_A以外の定数の値）のもとでありうる最大の値に近づくことになる。よって弱い散布度命題は常に成立するとわかる。

弱い散布度命題が意味することは，他の条件を一定としてσ_Aが増大し続ければ，Aの選択確率は「最終的には必ず上昇傾向を示す」ということに他ならない。したがって，強い散布度命題に前節でみたような例外が生じるとすれば，それはAの散布度が比較的低い値で推移する場合であり，Aの散布度が比較的高い値を推移するならば，その値の上昇（下降）に対応

して必ず A の選択確率も上昇（下降）すると言うことができる。

4.3. 強い散布度命題が成立するための条件

では強い散布度命題は他の変数がどんな値で一定であるときに成立するのか？言い換えれば，σ_A の変域によらず，σ_A の増大（減少）により ρ_{XY} が常に増大（減少）するのは他の様々な定数がどんな値をとるときか？それは式③を σ_A で微分すれば明らかになる。微分後の式（ρ'_{XY}）の詳細は付記6に記した。強い散布度命題が成立するための必要十分条件は，この ρ'_{XY} が σ_A の値がどうあれ常に正になることである。しかし，このことの実質的な意味合いを一口に説明することはできない。σ_A 以外の様々な定数が複雑に関係しているからである。そこで，ρ'_{XY} の式から導かれる十分条件（必要条件ではない）のうち，実質的な意味の分かりやすいものを一つだけ示しておこう。

$\rho_{AB} \leqq 0$ かつ $\rho_{AC} \leqq 0$ かつ $\rho_{BC} \leqq 0$ のとき強い散布度命題は常に成立する[(6)]。証明は付記6を参照してほしい。より実質的な言い方をすれば，事物 ABC それぞれを高く評価する人々が分離した3つの集団をなし，いずれの集団も他の2個の選択肢を低く評価するような場合，つまり3つの選択肢が明確な3極構造を示す場合には，ある事物の評価のばらつきが，その事物の選択確率に直結する。3人の候補から1人を選ぶ選挙になぞらえれば，支持基盤が明確に異なる3人の候補が立つ場合，強い散布度命題が成立する。このとき，3人の評価の平均値が等しいならば，評価がより極端に割れている候補ほど当選しやすい。一方，3個の相関の中に一つでも正のものがあれば，すなわち事物のペア AB，AC，BC のいずれかかが多くの人々によって似通ったものと認識されているとき，強い散布度命題には例外が生じる可能性がある。図3はそうした例外のひとつである。

5. 結論

本稿は単数選択法と評定法の結果の関係を数理的に分析してきた。具体的には，人々が3個の事物のうち1個を選択する場合，個々の事物の選択確率と，個々の事物に対する人々の評価（評点）の相関・散布度がどのように関係するかを，統計学の定理を援用して分析した。その結果，主に次の4点が明らかになった。

第1に，3個の事物に対する評価および評価の差を表す諸変数が多次元正規分布に従うならば相関命題は必ず成立する。つまり，ある事物が選択される確率は，他の2個の事物に対する評価の相関が高まると（その他の条件が一定ならば）必ず高まる。第2に，同様の仮定の下で（強い）散布度命題は必ずしも成立しない。すなわち，他の条件を一定としたとき，ある事物に対する評価の散布度（標準偏差）が増大すれば，その事物の選択確率が必ず増大するとは言えず，逆に低下する場合もある。第3に，同様の仮定の下で「弱い」散布度命題は常に成立す

る。つまり，他の条件を一定として，ある事物の評価の散布度が限りなく増大すれば，その事物の選択確率は，その条件の下でありうる最大の値へと限りなく近づいていく。第4に同様の仮定の下で，評価の相関がすべてゼロ以下となる時，強い散布度命題は常に成立する。つまり A を高く評価する人，B を高く評価する人，C を高く評価する人が，それぞれ分離した集団をなし，いずれの集団も他の2個の選択肢を低く評価する場合には，強い散布度命題が常に成立する。以上である。

相関命題および散布度命題は山口（2011）が既に提示していたが，山口（2011）は，数値実験に基づいて，特殊ケース，すなわち3個の事物の評価の期待値がすべて等しいケースにおいて相関命題と散布度命題が成立することを示したに過ぎない。これに対して本稿独自の意義は，統計学の定理に基づいて，より一般的な結論を導いたことにある。つまり多次元正規分布を仮定すれば相関命題が一般に真であること，また散布度命題が一般に真であるとは言えず，より弱い形の散布度命題が一般に真であること，そして元々の（強い）散布度命題が成立するための条件を示したことに本稿独自の意義がある。

最後に2点付け加えて締めくくる。第1点は，本稿の結果の社会調査論的なインプリケーションについてである。評定法を（事物の集合的評価を測定する方法として）より標準的な方法と考えれば，単数選択法を社会調査で用いることの危険性や，用いざるを得ない場合の注意事項について詳細に論じることができる。要するに相関命題・散布度命題の含意として「多くの人に選ばれた事物の評定平均が高いとは限らない」という主張を展開できる。しかし，この論点は既に山口（2011）において十分展開されているので，本稿でそれを繰り返すことはしない。むしろ本稿では，同じことの裏返しとして「評定平均の高い事物が実際に多くの人に選ばれるとは限らない」とも言えることを以下に強調しておきたい。

社会調査で単数選択法が用いられる目的は様々であって，複数の事物の社会的な評価を測定するというよりはむしろ，人々が複数の事物のうちどれを選択するかを単に「予測する」目的で用いられることもある。例えば，3つの大政党があって，今，比例代表制の選挙が行われたとしたら，人々はどの政党に投票するのかを調べたい場合や，3つのメジャーな自動車メーカーがあって，人々が近い将来，自家用車を買うとしたらどのメーカーの製品を買いたいかを調べる場合がそれにあたる。

本稿の結果を敷衍して述べれば，上のような目的の調査では，評定法よりも，人々の選択行動に即した単数選択法を用いる方が妥当な結果が得られる可能性がある。3つの政党，あるいは3つのメーカーに対する人々の評点の平均や合計点を明らかにしたとしても，それによってダイレクトに実際の選択行動を予測することはできない。本稿が明らかにしたように，評定の相関や散布度が，評定平均と選択確率との対応関係を独特な形で歪めるからである。評定法を用いてこの種の選択行動を予測したい場合は，単に平均点や合計点を求めるのではなく，個々人が3個の事物のうちどれに最も高い評点を与えたかをつぶさに調べる必要がある。しかし，

冒頭で述べた「票割れ」の現象が起きている場合，類似した２人の候補の支持者は，実際の選挙では（やむなく）どちらかに投票するとしても，調査において大雑把な離散変数での評定（たとえば１～５までの整数など）を求めた場合には，両者に単に同点を与えて済ませてしまう可能性もある。こうした場合，回答者に二者択一を迫る単数選択法がより妥当な方法と言えるかもしれない。

第２点は本稿の限界についてである。再三繰り返してきたように，本稿の結論はすべて多次元正規分布の仮定の下に導かれている。よって複数の事物に対する評価の分布として，全く違った種類の確率分布が仮定されるならば，結論は違ったものになる可能性がある。また，本稿はこの問題の本質を損なわない最も単純なケース，すなわち事物の数が３個の場合のみを扱った。事物の数が４個以上に増えた場合，単数選択法と評定法の関係には，３個の場合には見られなかった新たな特徴が生じるのだろうか？これらの問題については今後の課題となる。

付記1　2次元正規分布と2次元標準正規分布

XとYの同時確率分布が下の確率密度関数で表されるとき「XとYは2次元正規分布に従う」と言い，数式で（X，Y）～ N_2（μ_X，μ_Y，σ^2_X，σ^2_Y，ρ_{XY}）などと表現する。

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}Q\right\}$$

$$Q=\frac{1}{1-\rho_{XY}^2}\left\{\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}$$

また（X，Y）が N_2（0，0，1，1，ρ_{XY}）に従うとき，この分布を2次元標準正規分布といい，確率密度関数は以下のようになる。

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{\frac{-(x^2-2\rho_{XY}xy+y^2)}{2(1-\rho_{XY}^2)}\right\}$$

さらに，この2次元標準正規分布において，P（X ＞ x ∧ Y ＞ y）となる確率は，上の確率密度関数を2重積分した以下の式で求められる。

$$P(X>x\wedge Y>y)=\int_x^{\infty}\int_y^{\infty}\phi(u、v)\,du\,dv$$

付記2　式①の証明

$\rho_{XY}=\sigma_{XY}$／（σ_X・σ_Y）であり，σ_{XY}，σ_X，σ_Y を変数ABCで表現すれば以下のようになるから，式①が証明される。なお，E [ ] は，[ ] 内の変数の期待値を表す。

$$\begin{aligned}\sigma_{XY}&=E[XY]-E[X]E[Y]=E[(A-B)(A-C)]-E[A-B]E[A-C]\\&=E[A^2-AB-AC+BC]-(E^2[A]-E[A]E[B]-E[A]E[C]+E[B]E[C])\\&=E[A^2]-E^2[A]-(E[AB]-E[A]E[B])-(E[AC]-E[A]E[C])+E[BC]-E[B]E[C]\\&=\sigma_A^2-\sigma_{AB}-\sigma_{AC}+\sigma_{BC}^2\quad.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_X^2&=E[X^2]-E^2[X]=E[(A-B)^2]-E^2[A-B]\\&=E[A^2-2AB+B^2]-(E^2[A]-2E[A]E[B]+E^2[B])\\&=E[A^2]-E^2[A]+E[B^2]-E^2[B]-2(E[AB]-E[A]E[B])\\&=\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\sigma_{AB}\quad.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sigma_X=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_B^2-2\sigma_{AB}}\quad \text{同様に}\quad \sigma_Y=\sqrt{\sigma_A^2+\sigma_C^2-2\sigma_{AC}}\quad.$$

付記 3　式②の由来について

Johnson & Kotz（1972:p.95）には，相関係数 ρ の 2 次元標準正規分布に従う 2 変数が，同時に 0 より大きくなる確率として，正弦関数の逆関数（$\sin^{-1}$）を使った下の式が記されている。この式の（　）内は，幾何学的に言えば，ラジアン単位の角度を意味する。三角関数の性質により，一般に（$2/\pi$）＋ $\sin^{-1}\rho = \cos^{-1}$（$-\rho$）なので，下の式はよりシンプルな式②に変形できる。

$$P(X > 0 \wedge Y > 0) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\rho_{xy}\right)$$

付記 4　数値実験の方法

まず $\mu_A = \mu_B = \mu_C = 0$，$\sigma_B = \sigma_C = 1$，$\sigma_A=0.7$，$\rho_{AB} = \rho_{AC} = 0.7$，$\rho_{BC} = 0$ の 3 次元正規分布に従う変数 ABC の実現値（図 5）を発生させる方法を記す。表計算ソフト EXCEL の乱数発生機能を用いて，1 次元標準正規分布に従う互いに独立な 3 個の確率変数 Z_1，Z_2，Z_3 の実現値（z_1，z_2，z_3）をそれぞれ 2,000 個，発生させた。そして ABC の実現値（abc）を下の式のように算出した。この式の根拠は東京大学教養学部統計学教室編（1991：146–151 頁）を参照されたい。

$$a = 0.7\,z_1$$

$$b = 0.7\,z_1 + \sqrt{0.51}\,z_2$$

$$c = 0.7\,z_1 - \frac{0.49}{\sqrt{0.51}}z_2 + \sqrt{\frac{0.02}{0.51}}\,z_3$$

なお発生させた実現値はあくまで「サンプル」なので，その平均，標準偏差，相関係数は上記の理論値と正確には一致しない。ちなみに本稿の実験では，a の平均は約 0.006，標準偏差は約 0.690，b の平均は約 0.008，標準偏差は約 0.986，c の平均は約 0.002，標準偏差は約 0.999，相関係数は ab 間が約 0.690，ac 間が約 0.697，bc 間が約−0.014 であった。山口（2011）は同様の方法でサンプルサイズ 100 万のより正確な実験を行っているが，本稿の実験は正確な測定ではなく単なる例示が目的なので，上記の精度で十分と判断した。また，$\sigma_A=0.14$ のケース（図 4）では，上の $\sigma_A=0.7$ のときの a を単に 5 で割って a を算出し，bc の値はそのまま用いている。同じく $\sigma_A=1.75$（図 6）のケースでは，$\sigma_A=0.7$ のときの a を単に 2.5 倍して a を算出し，bc の値はそのまま用いている。

付記 5　弱い散布度命題の証明

式③の分子・分母を σ_A^2 で割り，分母の平方根を一つにまとめると，下の式のようになる。ここで σ_A 以外の変数が一定だとすると，σ_A を限りなく大きくすれば，分子の 1 以外の項はすべてゼロに近づき，分母の平方根の中の 1 以外の項もゼロに近づくから，ρ_{XY} は限りなく 1 に近づくとわかる。

$$\frac{\rho_{XY}\text{の分子}}{\sigma_A^2} = 1 - \rho_{AB}\frac{1}{\sigma_A}\sigma_B - \rho_{AC}\frac{1}{\sigma_A}\sigma_C + \frac{\rho_{BC}\sigma_B\sigma_C}{\sigma_A^2}$$

$$\frac{\rho_{XY}\text{の分母}}{\sigma_A^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2\left(\rho_{AB}\sigma_B + \rho_{AC}\sigma_C\right)\frac{1}{\sigma_A} + \left(\sigma_B^2 + \sigma_C^2 + 4\rho_{AB}\rho_{AC}\sigma_B\sigma_C\right)\frac{1}{\sigma_A^2} - 2(\rho_{AB}\sigma_B\sigma_C^2 + \rho_{AC}\sigma_B^2\sigma_C)\frac{1}{\sigma_A^3} + \sigma_B^2\sigma_C^2\frac{1}{\sigma_A^4}}$$

付記6　強い散布度命題の成立条件について

式③を σ_A の関数 f（σ_A）とみなし σ_A で微分すると式④のようになる。なお微分は数式処理ソフト「Mathematica ver.8.0.4」を用いて行い，式④はその結果を見やすく再整理したものである。

$$\rho'_{XY} = f'\left(\sigma_A\right) = (\alpha\sigma_A^3 + \beta\sigma_A^2 + \gamma\sigma_A + \delta)\,\varepsilon \qquad \cdots④$$

$$\alpha = \left(1 - \rho_{AB}^2\right)\left(\frac{\sigma_B}{\sigma_C}\right) + \left(1 - \rho_{AC}^2\right)\left(\frac{\sigma_C}{\sigma_B}\right) - 2(\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC})$$

$$\beta = -3\left\{\left(\rho_{AC} - \rho_{AB}\rho_{BC}\right)\sigma_B + \left(\rho_{AB} - \rho_{AC}\rho_{BC}\right)\sigma_C\right\}$$

$$\gamma = \left\{2 + \rho_{AB}^2 + \rho_{AC}^2 - 4\rho_{AB}\rho_{AC}\rho_{BC}\right\}\sigma_B\sigma_C - \left(\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC}\right)(\sigma_B^2 + \sigma_C^2)$$

$$\delta = -\left\{\left(\rho_{AB} - \rho_{AC}\rho_{BC}\right)\sigma_B + \left(\rho_{AC} - \rho_{AB}\rho_{BC}\right)\sigma_C\right\}\sigma_B\sigma_C$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_B\sigma_C}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)^{\frac{3}{2}}(\sigma_A^2 + \sigma_C^2 - 2\rho_{AC}\sigma_A\sigma_C)^{\frac{3}{2}}}$$

以下，$\rho_{AB} \leqq 0 \wedge \rho_{AC} \leqq 0 \wedge \rho_{BC} \leqq 0 \ \Rightarrow \ \rho'_{XY} > 0$ となることの証明を（ⅰ）～（ⅳ）に場合分けして示す。なお，本文2.1節の定義により標準偏差はすべて正であり $\rho_{AB} \leqq 0$ かつ $\rho_{AC} \leqq 0$ なので，$\varepsilon > 0$ である。よって式④の（　）内が正なら直ちに ρ'_{XY} が正だとわかる。

（ⅰ）$\rho_{AB} = 0 \wedge \rho_{AC} = 0 \wedge \rho_{BC} = 0$ のとき

このとき $\alpha = (\sigma_B / \sigma_C) + (\sigma_C / \sigma_B)$，$\beta = 0$，$\gamma = 2\sigma_B\sigma_C$，$\delta = 0$ となる。ここで，$\sigma_B > 0$ かつ $\sigma_C > 0$ なので，$\alpha > 0$ かつ $\gamma > 0$ だとわかる。さらに $\sigma_A > 0$ であるから④の（　）内は正である。$\therefore \rho'_{XY} > 0$。

（ⅱ）ρ_{AB}，ρ_{AC}，ρ_{BC} のうち1個が負で2個がゼロのとき

このとき（$\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC}$），（$\rho_{AB} - \rho_{AC}\rho_{BC}$），（$\rho_{AC} - \rho_{AB}\rho_{BC}$）はいずれもゼロ以下である。（$1 - \rho_{AB}^2$）および（$1 - \rho_{AC}^2$）のいずれか一方は1であり他方はゼロ以上となる。$\rho_{AB}\rho_{AC}\rho_{BC}$

は必ずゼロである。そして定義により $\sigma_A > 0$ かつ $\sigma_B > 0$ かつ $\sigma_C > 0$ である。これらの事実から $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$, $\gamma > 0$, $\delta \geqq 0$ となり④の（　）内は正。∴ $\rho'_{XY} > 0$。

（iii）ρ_{AB}, ρ_{AC}, ρ_{BC} のうち 2 個が負で 1 個がゼロのとき

このとき（$\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC}$），（$\rho_{AB} - \rho_{AC}\rho_{BC}$），（$\rho_{AC} - \rho_{AB}\rho_{BC}$）はいずれも必ず負であり，（$1 - \rho_{AB}^2$）および（$1 - \rho_{AC}^2$）は，$\rho_{AB}$ および ρ_{AC} が負であるかゼロであるかによらず，いずれも必ずゼロ以上となる。また $\rho_{AB}\rho_{AC}\rho_{BC}$ は必ずゼロである。さらに定義により $\sigma_A > 0$ かつ $\sigma_B > 0$ かつ $\sigma_C > 0$ である。これらの事実から $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ となり，④の（　）内は正だとわかる。∴ $\rho'_{XY} > 0$。

（iv）ρ_{AB}, ρ_{AC}, ρ_{BC} のすべてが負のとき

このとき（$\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC}$），（$\rho_{AB} - \rho_{AC}\rho_{BC}$），（$\rho_{AC} - \rho_{AB}\rho_{BC}$）はいずれも必ず負であり，（$1 - \rho_{AB}^2$）および（$1 - \rho_{AC}^2$）はゼロ以上となる。また $\rho_{AB}\rho_{AC}\rho_{BC}$ は必ず負である。定義により $\sigma_A > 0$ かつ $\sigma_B > 0$ かつ $\sigma_C > 0$ である。これらの事実から $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ となり，④の（　）内は正だとわかる。∴ $\rho'_{XY} > 0$。

〔注〕

(1)　これに対して第 1 種測定法とは，回答者自身の特性の測定を目的とする方法を指す。福武（1984）は第 1 種における回答者は「被告の立場」だが，第 2 種では「陪審員の立場」にあると説明している。

(2)　その他の方法とその特徴については原・海野（2004），山口 (2010) などを参照。

(3)　A を第 3 変数としたときの B と C の偏相関係数は，$\rho_{BC \cdot A} = (\rho_{BC} - \rho_{AB}\rho_{AC}) / \{\sqrt{(1 - \rho_{AB}^2)}\sqrt{(1 - \rho_{AC}^2)}\}$ で与えられる。偏相関係数は A を独立変数，B を従属変数としたときの回帰分析の残差と，同じく A を独立変数，C を従属変数としたときの残差との相関係数を意味する。よって $-1 \leqq \rho_{BC \cdot A} \leqq +1$ である。この不等式に $\rho_{AB} = -0.5$, $\rho_{AC} = -0.5$ を代入して変形すると，$-0.5 \leqq \rho_{BC} \leqq +1$ だとわかる。

(4)　木島（1994：106 頁）は同じ分布を指して「2 次元中心正規分布」と呼び，N_2（0, 0, 1, 1, 0）との混同を避けている。しかし本稿は木村（2011：31 頁）に従って「2 次元標準正規分布」と呼ぶことにした。

(5)　この問いに答えるには様々な個別のケースについて P（$X > 0 \wedge Y > 0$）を求めて比較する必要がある。ただし 1 次元正規分布における P（$X > x$）は x を標準化し，1 枚の標準正規分布表を用いて簡単に求められるのに対し，2 次元標準正規分布の場合 Z_X, Z_Y, ρ_{XY} という 3 個の変数が関係するため，P（$Z_X > z_x \wedge Z_Y > z_y$）を示した使い勝手のよい数表は存在しない。したがって Drezner & Wesolowsky（1990）などによる近似式で直接計算するしかない。また木島（1994：111-112 頁），松原 (2003：99-100 頁)，木村（2011：36-39 頁）では，その他の近似計算法が紹介されている。

(6)　$\rho_{AB}=0$ かつ $\rho_{AC}=0$ かつ $\rho_{BC}=0$ のときに強い散布度命題が成立することは，山口（2011）が実験により推定したとおりである。

文献

Bohrnstedt, G. W., and Knoke D., 1988, *Statistics for Social Data Analysis 2nd. ED.*, Peacock.（訳書：ボーンシュテット＆ノーキ著，海野道郎・中村隆（監訳）. 1990.『社会統計学　－学生版－』. ハーベスト社）.

Drezner, Z., and Wesolowsky, G. O., 1990, The computation of the bivariate normal integral, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 35: 101-107.
福武直，1984,『社会調査　補訂版』，岩波書店 .
原純輔・海野道郎，2004,『社会調査演習　第 2 版』，東京大学出版会.
平岡和幸・掘玄，2009,『プログラミングのための確率統計』，オーム社.
Johnson, N. L., and Kotz, S., 1972, *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*, John Wiley & Sons, Inc.
木村俊一，2011,『ファイナンス数学』，ミネルヴァ書房.
木島正明，1994,『ファイナンス工学入門　第Ⅰ部　ランダムウォークとブラウン運動』，日科技連.
松原望，2003,『入門確率過程』，東京図書.
中村和男・富山慶典，1998,『選択の数理　－個人的選択と社会的選択－』，朝倉書店.
岡田泰栄，1980,『多変量の統計』，共立出版.
Poundstone, W., 2008, *Gaming the Vote: Why Elections Aren't Fair (and What We Can Do About It)*.（訳書：ウィリアム・パウンドストーン著，篠儀直子訳，2008,『選挙のパラドクス　－なぜあの人が選ばれるのか？－』，青土社）.
佐伯胖，1980,『「きめ方」の論理　－社会的決定理論への招待－』，東京大学出版会.
東京大学教養学部統計学教室編，1991,『統計学入門』，東京大学出版会.
山口洋，2010,「投票としての調査　－社会的選択理論を応用した調査方法論に向けて－」,『佛教大学社会学部論集』50：69-83 頁.
山口洋, 2011,「3 個の選択肢から 1 個を選ぶことの意味－単数選択法の結果と評価の相関および散布度－」,『佛教大学社会学部論集』53：19-38 頁.

（やまぐち　よう　現代社会学科）
2015 年 11 月 2 日受理